

FUNCIÓ ZETA DE RIEMANN

Pere Gregori i Colomé

Juny 2008

Llegint el llibre “La música de los números primos” de Marcus du Sautoy se m’han plantejat molts interrogants. En aquests fulls que segueixen intentaré deixar constància dels pocs que he pogut resoldre.

El rus Grigori Perelman va aconseguir demostrar la conjetura de Poincaré, un dels problemes clàssics irresolts que teníem pendents des del pasat mil.lenni. A hores d’ara ningú m’ha explicat d’una manera clara en què consisteix aquest, ja ara, teorema. (A mi em sembla que té a veure amb la irreductibilitat a un punt de determinades línies tancades dibuixades sobre la superfície d’un tor en un espai de més de tres dimensions).

Per altra banda, l’eminent matemàtic David Hilbert va plantejar, en el segon Congrés Internacional de Matemàtiques celebrat a París l’any 1900, vint-i-tres problemes que en aquell moment es consideraven bàsics per encarar en bon peu el segle que començava. L’anunciat del vuitè d’aquests problemes diu simplement: demostrar la hipòtesi de Riemann segons la qual tots els zeros de la funció zeta es troben sobre la línia $x = 0.5$ del pla imaginari $x + yi$. Si algun dia la hipòtesi esdevé teorema espero, si més no, que el que aquí exposo ens ajudi a tots plegats a saber de què va la cosa.

La sèrie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sortia en el meu llibre de càlcul de primer de carrera com exemple

de sèrie no convergent (es demostra fàcilment que suma dels primers n elements és sempre més gran que $\ln(n)$). Aquesta sèrie va rebre el nom de sèrie harmònica perquè es correspon perfectament amb les freqüències amb que vibra una corda de violí.

Ja en temps d’Euler aquesta sèrie es va generalitzar de la forma $1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ on s pot ser qualsevol número enter; aleshores es demostra que quan $s > 1$ la sèrie infinita té un valor finit. El propi Euler va causar sensació en demostrar que pel cas $s=2$ el resultat de la suma infinita és $\frac{\pi^2}{6}$.

La generalització suprema va venir de la mà de Riemann quan va començar a estudiar què passava quan admitem que s pugui ser un número complex, és a dir, format de part real i part imaginària. No sé si des d’aquell moment o una mica abans aquesta sèrie va rebre el nom de funció zeta i s’acostuma a representar per la corresponent lletra grega ζ . Perquè quedi clar escrivim:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ on } s \text{ pot ser qualsevol número complex.}$$

En aquest cas la sèrie és convergent (és a dir té valor finit) quan la part real de s és més gran que 1. Com que això deixava sense definir la funció ζ a tot el pla imaginari a l’esquerra de la línia $x=1$, Riemann va buscar el que s’anomena extensió analítica de la funció.

L’extensió es basa en la funció eta de Diriclet (també anomenada funció zeta alternativa):

$$\eta(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \text{ on } s \text{ pot ser qualsevol número complex.}$$

Aleshores la sèrie és convergent quan la part real de s és més gran que zero. Un exemple típic d'aquesta funció és: $\eta(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln(2) = 0.69315$

Això ens obre un nou passadís entre l'eix de les y i la línia $x=1$ abans esmentada que pot semblar poca cosa però que, com aviat veurem, dona per molt.

Fent una mica de cuina matemàtica es demostra que $\zeta(s) = \frac{\eta(s)}{1-2^{1-s}}$

Quedi clar que ζ segueix sense tenir valor definit quan $x < 1$, però en teoria de variable complexa es demostra que es pot aprendre moltes coses d'una funció estudiant la seva extensió analítica.

Encara que no tingui massa importància pel que hem de dir no podem deixar d'esmentar que aquesta expressió té valor ∞ quan $s=1$, dit d'altre manera hi ha un pol al punt $s=1$.

Amb el que portem explicat fins aquí podem entendre l'anunciat de la hipòtesi de Riemann: tots els punts no trivials on la funció $\zeta(s)$ té valor zero són de la forma $s = 0.5 + yi$.

Els tres primers zeros, expressats amb els 6 primers decimals, són:

$$\zeta(0.5 + 14.134725 i) = 0$$

$$\zeta(0.5 + 21.022040 i) = 0$$

$$\zeta(0.5 + 25.010856i) = 0$$

El zeros trivials són als punts $s=-2$, $s=-4$, $s=-6\dots$, però jo aquí us haig de confessar no hi veig els zeros ni la trivialitat per enlloc. Si hi ha mai ningú que llegint aquests papers arribi fins aquestes línies i em pugui aclarir aquest punt li agrairé profundament.

A l'adreça www.dtc.umn.edu/~odlyzco/zeta_tables/index.html podem trobar els primers 100 zeros de la funció ζ amb 1000 decimals i els 99900 següents amb només 8. (Si, com a mí, no us funciona el link acabareu abans si a Google busqueu "riemann zeta function zeros").

Com podeu suposar aquí no explicarem com arribar a aquest valor, però si almenys som capaços de comprobar-ne algun semblarà que hàgim entès millor de què va la pel.lícula.

Comencem pel que el Dr.Ninot en diria propedèutica.

Un número complex es pot expressar de dues maneres:

- 1) Cartesiana: $s = x + yi$ on x és la part real i y la part imaginària
- 2) Polar: $s = \rho e^{i\theta}$ on ρ és el mòdul i θ es l'angle que forma respecte a l'eix de les x el radi vector que va de l'origen del sistema de coordenades al punt $x + yi$, expressat en radians. L'expressió $e^{i\pi} = -1$ és un magnífic exemple d'aquesta notació i, al mateix temps, un compendi de les constants més importants que suporten tot l'edifici matemàtic.

Les relacions entre aquestes magnituds són bastant evidents excepte la basada en la fórmula d'Euler que ens diu que $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$.

Es pot veure clarament que la notació cartesiana ens permet sumar números complexos fàcilment i fins i tot multiplicar-los o dividirlos. La notació polar ens permet multiplicar i dividir més fàcilment i es fa imprescindible quan volguem treballar amb exponents.

De la definició de logaritme natural o neperià s'en deriva que si $a = \ln(b)$ aleshores $b = e^a$

Finalment recordem que $\ln(b^s) = s \ln(b)$

Amb aquestes quatre nocions estem amb condicions de calcular, per exemple, el cinquè terme de la sèrie $\eta(s)$ amb $s = 0.7 + 10i$, que podem anomenar T5 i valdrà

$$T5 = \frac{1}{5^{(0.7+10i)}} = 5^{(-0.7-10i)}$$

Treient el logaritme de cada costat de l'expressió tenim

$$\ln(T5) = -0.7 \ln(5) - 10 \ln(5) i = -1.1266 - 16.0944 i$$

si ara treiem l'antilogaritme tindrem

$$T5 = e^{(-1.1266-16.0944 i)} = e^{-1.1266} e^{-16.0944 i} = 0.3241 e^{-16.0944 i}$$

que és la notació polar d'un número complex de mòdul 0.3241 que forma un angle amb l'eix de les x de -16.0944 radians = -922.14° i reduït al primer gir 157.86° .

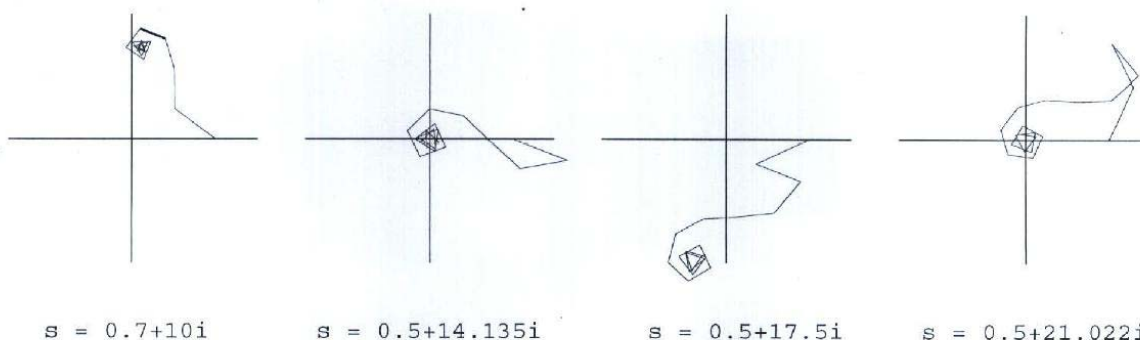
Per poder sumar aquest resultat als altres termes de la sèrie l'hem de passar a coordenades cartesianes, multiplicant 0.3441 per $\cos(157.86)$ i $\sin(157.86)$ obtindrem $T5 = -0.3002 + 0.1222 i$.

En el primer dels gràfics que més avall comentem aquest terme es distingeix per estar dibuixat una mica més gruixut.

La paradoxa de Zenò reflecteix les dificultats que van tenir els antics savis grecs per comprendre que la suma dels temps emprats en recórrer els infinits trams necessaris perquè Aquiles atrapés la tortuga donés un total finit.

Els gràfics següents ens ajudaran a entendre com, per obra i gràcia de la flexibilitat de les funcions de variable complexa, la suma dels infinits trams de la funció ζ no tan sols donen un resultat finit sinó que fins i tot aquest resultat pot ser zero.

Primers passos de la funció eta a la recerca del seu punt de convergència



Si veièssim com creixen aquests gràfics tram a tram podríem tenir la impressió que seguim els moviments d'una formiga que sembla que no sap on va però sempre acaba arribant al seu niu.

Els gràfics ens mostren els vint primers elements de la sèrie $\eta(s)$ per quatre valors diferents de s , dos que corresponen als dos primers zeros de la funció ζ , (que són els mateixos que els de la funció η) i dos que convergeixen a altres punts del pla complex.

Aquí s'acaba el que he pogut esbrinar sobre la funció ζ de Riemann, però no podem oblidar la importància de que la localització dels seus zeros està profundament relacionada amb la densitat de números primers en diferents segments dels números naturals.

El lligam bé donat per l'expressió:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{-s}} \times \frac{1}{1-3^{-s}} \times \frac{1}{1-5^{-s}} \times \frac{1}{1-7^{-s}} \times \dots = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_i^{-s}} \quad (p_i = i\text{èssim número primer})$$

Aquesta igualtat sí que està més que demostrada i jo m'he limitat a fer uns càlculs per assegurar-me d'haver entès el significat d'aquestes operacions.

Els resultats d'aquestes comprovacions són els següents:

EXPONENT	Resultat 100 primers termes			Valor teòric
S	Serie Sumes	Serie Productes		
2 + 0i	1,634983900185 + 0i	1,644515221724 + 0i		$\pi^2 / 6$
4 + 0i	1,082322905344 + 0i	1,082323233369 + 0i		$\pi^4 / 90$
3.4 + 5.6i	0,950003825113 + 0,059126675079i	0,950003115361 + 0,059124197068i		

EXPONENT	Resultat 1000 primers termes			Valor teòric
S	Serie Sumes	Serie Productes		
2 + 0i	1,643934566682 + 0i	1,644913174706 + 0i		1,644934066848
4 + 0i	1,082323233378 + 0i	1,082323233711 + 0i		1,082323233711
3.4 + 5.6i	0,950003121915 + 0,059124212766i	0,950003116224 + 0,059124204133i		

Com no podia ser d'altra manera quants més termes té la serie més precís és el resultat. Per altra banda podem observar que com més gran és l'exponent més ràpidament convergeix la sèrie. Finalment veiem que la sèrie de productes és més convergent que la de sumes, degut a que la sèrie de primers creix més ràpidament que la successió de números naturals.